平成 28 年度入学者選抜学力検査予想問題

数　　　　学

栃木県私塾協議会

1 次の１～14に答えなさい。

1　$-9+2$ を計算しなさい。

2　$3(2a-1)-2(3a-4)$ を計算しなさい。

3　$3xy^2 \div 6xy \times (-4x^2)$ を計算しなさい。

4　$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ を h について解きなさい。

5　ある数 a の小数第２位を四捨五入して得られた近似値が 6.4 であるとき，a の値の範囲を求めなさい。

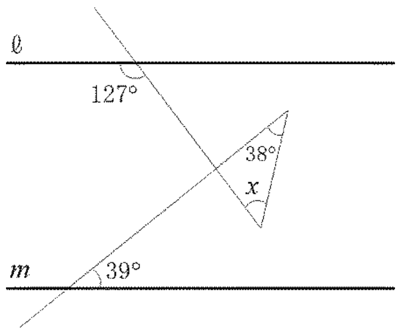
6　次の $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に自然数を入れて等式が成り立つようにしたい。$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまる自然数の組を１つ求めなさい。

$$\sqrt{12}+\sqrt{\boxed{ア}}=\sqrt{\boxed{イ}}$$

7　二次方程式　$x^2=x+1$　を解きなさい。

8　右の図１において，$\ell \,//\, m$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

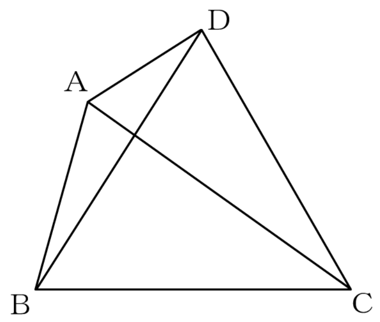
図１



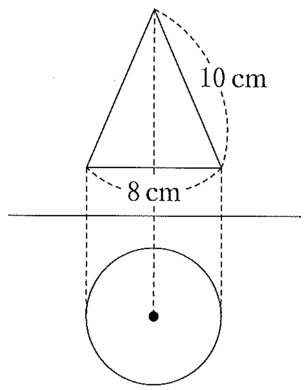
9　正十二角形の１つの内角の大きさを求めなさい。

10　　y は x に反比例し，x＝－6 のとき y＝2 である。このとき，比例定数を求めなさい。

11　　右の図のように，四角形 ABCD があり，対角線 AC，BD をひく。∠ABD＝20°，∠DBC＝60°，∠ACB＝35° で，頂点 A，B，C，D が 1 つの円周上にあるとき，∠BDC の大きさを求めなさい。



12　右の図は，円すいの投影図である。この円すいの表面積を求めなさい。
ただし，円周率は π とする。



13　　ある工場で同じ製品が 60000 個製造された。このうち 300 個を無作為に抽出して検査したところ，2 個が不良品であった。このとき，この工場で製造された 60000 個の製品のうちの不良品の個数はおよそ何個と推測されるか，求めなさい。

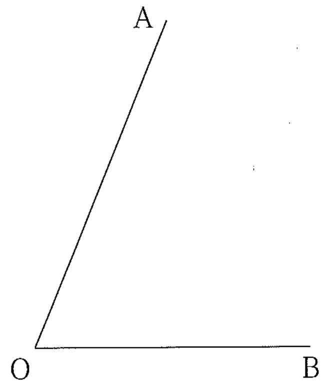
14　　A，B，C の 3 人で 1 回じゃんけんをするとき，A だけが勝つ確率を求めなさい。

2　次の1～3に答えなさい。

1　あとの図のように，線分 OA，OB がある。下の【条件】の①，②をともにみたす点 P を，定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし，作図に使った線は残しておくこと。

【条件】　①　点 P は，∠AOB を二等分する直線上にある。

②　点 P は，線分 OA を斜辺とする直角三角形の頂点である。



2 下の表は，16 人の生徒について，立ち幅とびの記録を示したものである。階級の幅を 20 cm とし，最初の階級を 140 cm 以上 160 cm 未満として度数分布表をつくったとき，度数が最大になる階級は，あとの㋐～㋕のうちのどれか。1 つ選んで，その記号を書け。

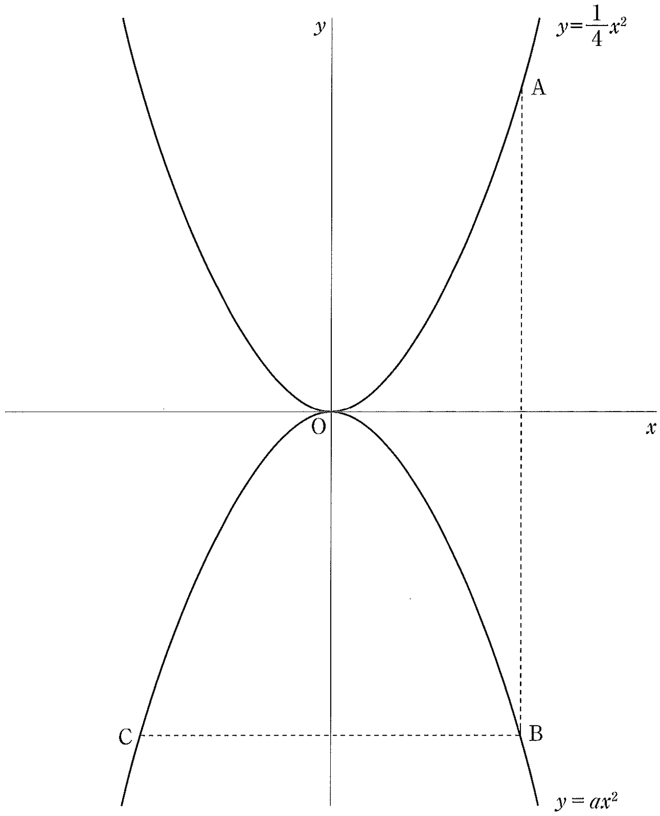
立ち幅とびの記録　(単位 cm)

237	182	170	212	244	193	205	168
202	239	220	186	143	199	162	190

㋐ 140 cm 以上 160 cm 未満　㋑ 160 cm 以上 180 cm 未満　㋒ 180 cm 以上 200 cm 未満

㋓ 200 cm 以上 220 cm 未満　㋔ 220 cm 以上 240 cm 未満　㋕ 240 cm 以上 260 cm 未満

3　下の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に点 A があり, 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に異なる 2 点 B，C があります。関数 $y=ax^2$ のグラフは，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと x 軸について対称です。また, A, B は x 座標が等しく, B, C は y 座標が等しくなっています。線分 AB の長さが線分 BC の長さより 30 長いとき，BC の長さを求めなさい



3 次の**1**，**2**に答えなさい。

1 1～20までの正の整数から3つの数を選び，それぞれA，B，Cとする。BはAより5小さい数であり，CはAの2倍より1小さい数である。AとBの積がCを3倍したものより25小さいとき，整数A，B，Cをそれぞれ求めなさい。　ただし，整数Aをxとして、xについての方程式をつくり，答えを求めるまでの過程も書きなさい

2 数学の授業で，先生から次の問題が出された。

問題　6でわったとき2余る正の整数と，6でわったとき3余る正の整数との積は，どんな数になるだろうか。

次の問1～問3に答えなさい。

(1)　みほさんは，どんな数になるかを調べるために右の表をつくった。表中の**ア**，**イ**にあてはまる数の組を1つ書きなさい。ただし，**ア**にあてはまる数は8より大きい数とする。

(6でわったとき 2余る正の整数)	×	(6でわったとき 3余る正の整数)	＝	(積)
2	×	3	＝	6
2	×	9	＝	18
8	×	3	＝	24
8	×	9	＝	72
ア	×	3	＝	**イ**

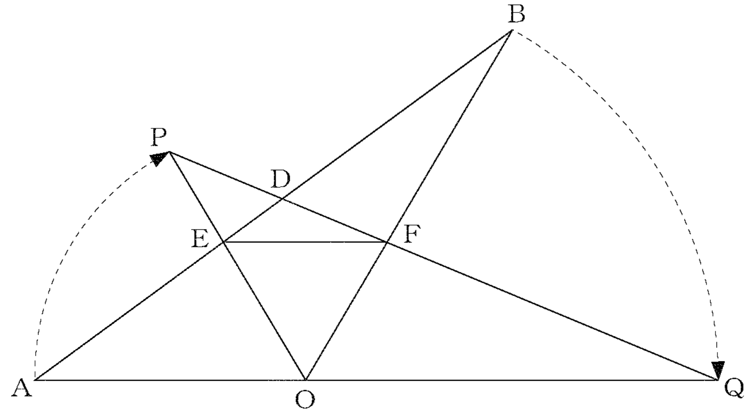
(2) みほさんは，**問1**で調べたことから，「6でわったとき2余る正の整数と，6でわったとき3余る正の整数との積は，いつも6の倍数である。」と予想し，その予想が正しいことを次のように証明した。みほさんの証明を完成させなさい。

証明　6でわったとき2余る正の整数を，6m＋2と表す。
ただし，mは0以上の整数とする。

したがって，6でわったとき2余る正の整数と，6でわったとき3余る正の整数との積は，いつも6の倍数である。

4　次の**1**，**2**の問いに答えなさい。

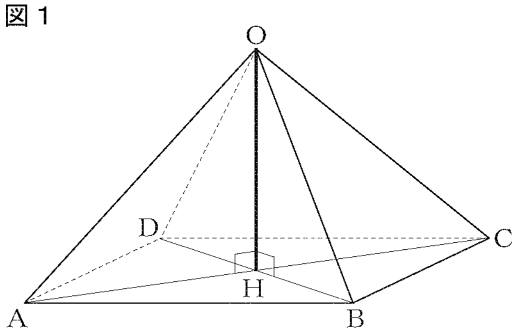
1　右の図のように，△OAB と△OPQ があり，△OAB≡△OPQ，∠AOB＝120°である。△OAB を点 O を回転の中心として，時計の針の回転と同じ向き(矢印の方向)に 60° 回転移動させると，△OPQ とちょうど重なる。線分 AB と線分 PQ との交点を D，線分 AB と線分 PO との交点を E，線分 OB と線分 PQ との交点を F とし，点 E と点 F を結ぶ。　このとき，△OBE≡△OQF を証明しなさい。



2　すべての辺の長さが 4 cm である正四角錐(すい)OABCD がある。あとの問いに答えなさい。

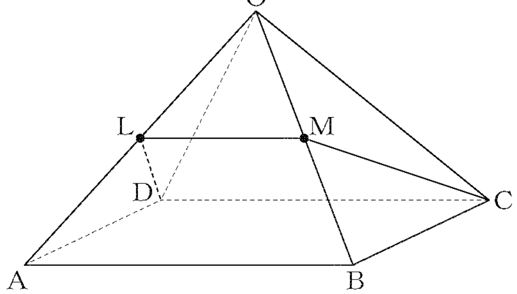
(1)　**図1**のように，正四角錐において，底面の正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を H とするとき，線分 OH は底面の正方形 ABCD と垂直である。
　このとき，線分 OH の長さを求めなさい。

図1



(2)　**図2**のように，正四角錐の辺 OA，OB の中点をそれぞれ L，M とし，4 点 L，M，C，D を通る平面で正四角錐を切る。
　このときできる立体 LMABCD の体積を求めなさい。

図2



5 図１のように，直方体状の容器があり，その中には水をさえぎるために，底面と垂直な長方形のしきりがある。この容器に，図２のような直方体のおもりを，容器の頂点 A とおもりの頂点 B とが重なるように入れて固定する。次に，その容器の底面に，排水量を調整できる排水装置 p，q を取りつけて図３のようにし，水平に置いた。なお，容器としきりのそれぞれの厚さは考えないものとする。

次の１，２の問いに答えなさい。

図１

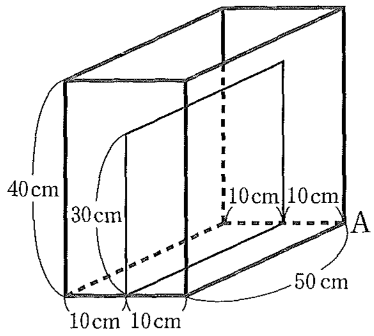


図２

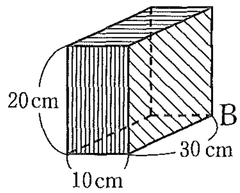
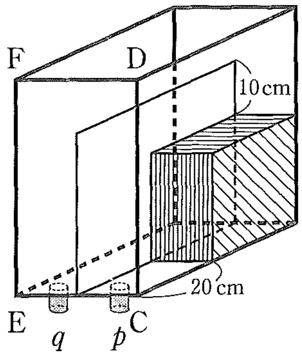


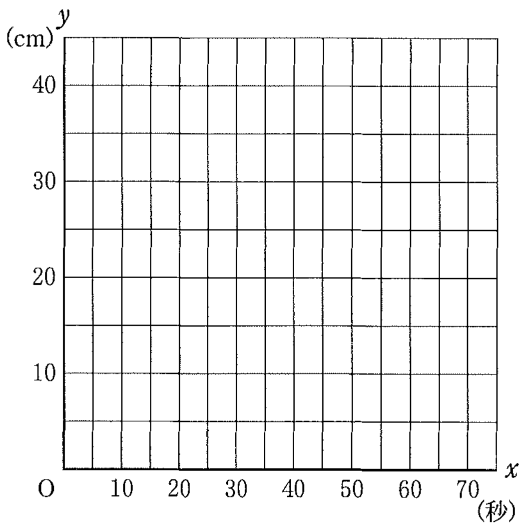
図３



1　図３の容器を満水にし，p, q から同時に排水を始める。p から毎秒 200 cm^3, q から毎秒 300 cm^3 の割合で排水し，p の側の水面の高さは辺 CD で測り，q の側の水面の高さは辺 EF で測る。排水を始めてからの時間を x 秒，辺 CD で測る水面の高さを y cm とする。

(1) 辺 CD で測る水面の高さが 30 cm となるのは，排水を始めてから何秒後であるかを求めなさい。

(2) 排水を始めてから，辺 CD で測る水面の高さが 0 cm になるまでの，x と y との関係を表すグラフをかきなさい。



(3) しきりの両側の水面の高さが，0 cm と 30 cm の間で等しくなるのは，排水を始めてから何秒後であるかを求めなさい。

2　図３の容器を満水にし，p，q から同時に排水を始め，しきりの両側の水が同時になくなるようにしたい。p から毎秒 200 cm^3 の割合で排水するとき，q からの排水の割合を毎秒何 cm^3 にすればよいかを求めなさい。

6 健司さんは，江戸時代の数学を紹介した本を読んで，「薬師算（やくしざん）」に興味をもち，調べた内容を次のようなレポートにまとめました。

薬師算のしくみ

薬師算は，相手が正方形の形に並べた碁石（ごいし）の総数を，碁石を見ないで当てる方法です。その手順は次のとおりです。

1. 相手に，碁石を**図１**のように，正方形の形に並べてもらう。ただし，１辺の碁石の数は５個以上とする。
2. **図２**のように，**図１**の碁石を，各段の個数が正方形の１辺の碁石の数になるように，並べ替えてもらう。
3. 最後の段には，あまった碁石を並べてもらう。
4. あまりの数（最後の段に並べた碁石の個数）だけを教えてもらう。
5. あまりの数を４倍して 12 をたすと，碁石の総数を当てることができる。

図１

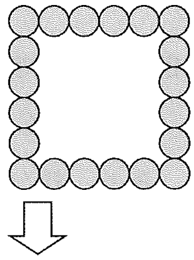
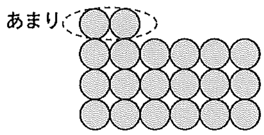


図２

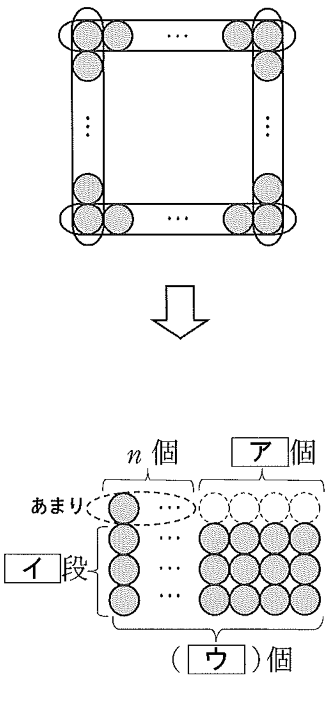


(1) あまりの数が「2」のとき，薬師算の方法を使って，相手が並べた碁石の総数を求める**式**を書きなさい。

(2) このレポートには，「あまりの数を４倍して 12 をたす」と，碁石の総数を当てることができる理由も書かれています。次の内容が正しくなるように，**ア**，**イ**には**数**を，**ウ**，**エ**には**最も適切な式**を書きなさい。

図３

図４



［理由］

・**図３**のように，碁石を　　　で囲んで考える。正方形の各頂点の碁石は重複しているので，正方形の形に並べられた碁石の総数は，１辺の碁石の数の４倍より $\boxed{ア}$ 個少ない。

・**図３**の碁石を**図４**のように並べ替えると，**図３**の正方形の１辺と同じ数の碁石が並ぶ段が $\boxed{イ}$ 段と，正方形の１辺より $\boxed{ア}$ 個少ない碁石が並ぶ段が１段できる。

あまりの数を n とすると，正方形の１辺の碁石の数は（$\boxed{ウ}$）個となる。

このことから，碁石の総数を求める式は，

$(\boxed{ウ})\times\boxed{イ}+n$

$=\boxed{エ}$

・したがって，碁石の総数は，
あまりの数を４倍して 12 をたすと，
当てることができる。

(3)　健司さんのレポートを読んだ美咲さんは,「正五角形の形に並べられた碁石についても同じようなことができるのではないか」と気づき，このことが正しいことを説明したいと考えました。**オ**～**キ**の [　　] に続きを書いて，説明を完成させなさい

図５

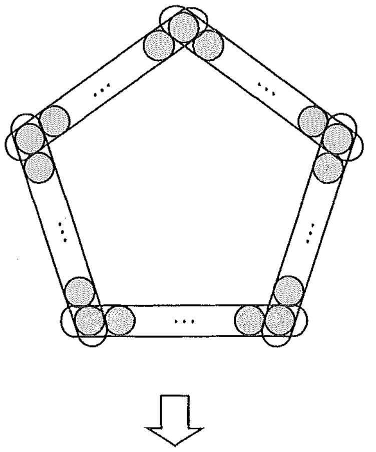
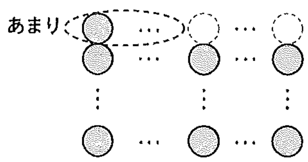


図６



［説明］

・１辺の碁石の数は６個以上とする。

・**図５**のように，碁石を (　　) で囲んで考える。正五角形の各頂点の碁石は重複しているので, 正五角形の形に並べられた碁石の総数は，１辺の碁石の数の [**オ**] 少ない。

・**図５**の碁石を**図６**のように並べ替えると,

[**カ**]

・したがって，碁石の総数は,

[**キ**] と,

当てることができる。

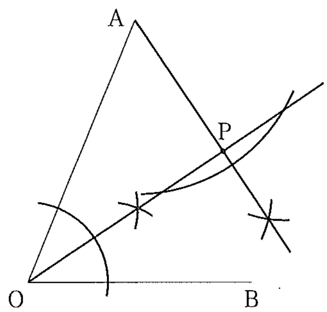
【解答・解説】

1

1	-7	2	5	3	$-2x^2y$	4	$h=\dfrac{3V}{\pi r^2}$	5	6.35≦a＜6.45
6	(ア,イ)＝（3,27）（12,48）など			7	$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	8	50	9	150
10	-12	11	65	12	およそ 400	13	56π	14	$\dfrac{1}{9}$

2

1



2 ㋒

3 20

$A\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$とおく。$B\left(t,\ -\dfrac{1}{4}t^2\right)$，$C\left(-t,\ -\dfrac{1}{4}t^2\right)$とおける。AB＝BC＋30 より，

$2\times\dfrac{1}{4}t^2=2t+30$　$t^2-4t-60=0$　$(t-10)(t+6)=0$　$t>0$ より，$t=10$　よって，BC＝2×10＝20

3

1　B＝x－5、　C＝2x－1　となるから

$x(x-5)+25=3(2x-1)$

$x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$

$x=4,\ 7$

A，B，C は 1 から 20 までの正の整数だから

$x=4$ のとき

A は 4，B は－1，C は 7 となり，

問題にあわない。

$x=7$ のとき

A は 7，B は 2，C は 13 となり，

問題にあっている。

(答)　整数 A は 7，B は 2，C は 13

2 (1) ア　　14

イ　　42

(2) 証明　6でわったとき2余る正の整数を，$6m+2$ と表す。

ただし，mは0以上の整数とする。

6でわったとき3余る正の整数を，$6n+3$ と表す。

ただし，nは0以上の整数とする。

$$(6m+2)(6n+3)=36mn+18m+12n+6$$
$$=6(6mn+3m+2n+1)$$

$6mn+3m+2n+1$ は整数だから，

$6(6mn+3m+2n+1)$ は6の倍数である。

したがって，6でわったとき2余る正の整数と，6でわったとき3余る正の整数との積は，いつも6の倍数である。

4

1 〔証明〕

△OBEと△OQFにおいて，

△OAB≡△OPQだから，

OB＝OQ　…………………………………(1)

∠EBO＝∠FQO　……………………………(2)

△OABを点Oを回転の中心として60°回転移動させると，△OPQに重なることから，

∠EOB＝∠AOB－∠AOE

＝120°－60°

＝60°　…………………………………(3)

∠FOQ＝60°　………………………………(4)

(3)，(4)から，

∠EOB＝∠FOQ　……………………………(5)

(1)，(2)，(5)から，1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△OBE　≡△OQF

2 （1）　$2\sqrt{2}$　cm

四角形ABCDは1辺が4 cmの正方形だから，三平方の定理より，AC＝$4\sqrt{2}$ (cm)　△OACにおいて，OA＝OC，OH⊥ACだから，AH＝CH＝$4\sqrt{2}\div 2=2\sqrt{2}$ (cm)　△OAHにおいて，三平方の定理より，OH＝$\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$　(cm)

（2）　$\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$　cm^3

辺 AB の中点を N とする。△OAB 上で M を通り ON に平行な直線と AB との交点を P，L を通り ON に平行な直線と AB との交点を Q とする。また，P を通り BC に平行な直線が CD と交わる点を R，Q を通り AD と平行な直線が CD と交わる点を S とする。M から面 ABCD に垂線をひき，交点を K とすると，MK // OH，BM＝OM より，BK＝KH　よって，中点連結定理から，$\mathrm{MK}=\frac{1}{2}\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}$ $=\sqrt{2}$ (cm)　△BON において，MP // ON，BM＝OM より，BP＝PN＝4÷2÷2＝1 (cm)　同様に CR ＝AQ＝DS＝1 cm　よって，求める立体の体積は，合同な四角すい 2 つと三角柱の和と考えて，
$\left(\frac{1}{3}\times1\times4\times\sqrt{2}\right)\times2+\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}\times2=\frac{8\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)

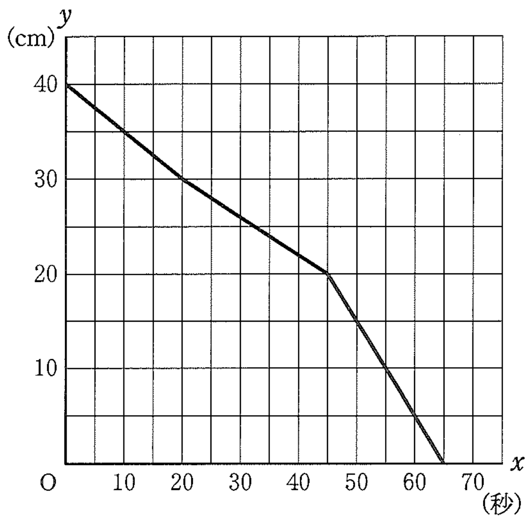
5

1　(1) 20　秒後

(3) $\frac{115}{2}$ 秒後

2　毎秒 $\frac{1000}{3}$ cm^3

(2)



1　(2) CD＝30 から CD＝20 になるまでは，10×50×(30－20)＝5000 (cm^3) の水を毎秒 200 cm^3 の割合で排水するから，かかる時間は 5000÷200＝25 (秒)　また，CD＝20 から CD＝0 になるまでは，10×(50－30)×20＝4000 (cm^3) の水を毎秒 200 cm^3 の割合で排水するから，かかる時間は 4000÷200 ＝20 (秒)　よって，(0，40)，(20，30)，(45，20)，(65，0) を線分で結ぶ。
(3) EF＝30 から EF＝0 になるまでは，10×50×30＝15000 (cm^3) の水を毎秒 300 cm^3 の割合で排水するから，かかる時間は 15000÷300＝50 (秒)　よって，排水を始めてから x 秒後の辺 EF で測る水面の高さを y cm としたとき，関係を表すグラフは，(0，40)，(20，30)，(70，0) を線分で結んだものとなる。2 つのグラフをかきこむと，水面の高さが 0 cm と 30 cm の間で等しくなるのは，$45\leqq x$ のとき。このとき，グラフから式を求めると，CD の方の x，y の関係を表す式は，$y=-x+65$，EF の方の x，y の関係を表す式は，$y=-\frac{3}{5}x+42$　この 2 つの式を連立方程式として解き，x の値を求めると，
$x=\frac{115}{2}$ (秒後)

2　q から 65－20＝45 秒間に，10×50×30＝15000 cm^3 の水を排水できるといいので，15000÷45 ＝ $\frac{1000}{3}$ より，毎秒 $\frac{1000}{3}$ cm^3

6

1	(例)	2×4＋12
2	ア	4

	イ	3
	ウ	n＋4
	エ	4n＋12
3	オ	(例)　5倍より5個
	カ	(例) **図５**の正五角形の1辺と同じ数の碁石が並ぶ段が4段と，正五角形の1辺より5個少ない碁石が並ぶ段が1段できる。 あまりの数をnとすると，正五角形の1辺の碁石の数は（n＋5）個となる。 このことから，碁石の総数を求める式は， 　(n＋5)×4＋n＝5n＋20
	キ	(例) あまりの数を5倍して20をたす

問１　(1)（あまりの数)×4＋12より，2×4＋12